BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat traite les 4 exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} *près.*

Une ville étudie l'usage de son **service de vélos en libre-service**. Chaque usager peut déverrouiller un vélo notamment avec une **carte d'abonné à l'année** ou via une **application mobile**.

On sait que :

- 20% des usagers disposent d'un **abonnement annuel** ;
- 60% des usagers utilisent l'**application mobile** pour déverrouiller un vélo ;
- parmi les usagers abonnés annuels, 50% utilisent l'application mobile.

On choisit un usager au hasard. On note :

A : « l'usager a un abonnement annuel » M : « l'usager utilise l'application mobile »

Les événements contraires sont notés $\overline{A}$ et $\overline{M}$.

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner **sans calcul** :

$$\mathrm{p}(A) \qquad \mathrm{p}(M) \qquad \mathrm{p}_A(M)$$

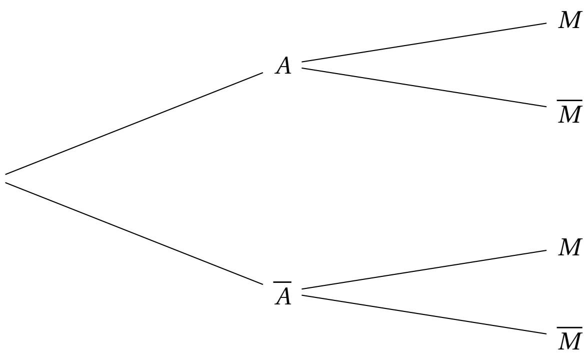
2. **a)** Calculer $\mathrm{p}(A \cap M)$. Interpréter le résultat.

   b) En déduire $\mathrm{p}(A \cap \overline{M})$.

3. **a)** Calculer $\mathrm{p}(\overline{A} \cap M)$.

   b) En déduire $\mathrm{p}_{\overline{A}}(M)$. Interpréter le résultat.

4. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



5. Calculer $\mathrm{p}_M(A)$ et interpréter le résultat.

6. **Affirmation.**
« Parmi les usagers utilisant l'application mobile, moins de 20% ont un abonnement annuel. »
Dire si cette affirmation est vraie ou fausse. Justifier.

Partie B

La ville met en place une **offre promotionnelle** pour ses vélos en libre-service.

- Un usager ayant un **abonnement annuel** bénéficie d'une réduction de **2 euros**.
- Un usager utilisant l'**application mobile** bénéficie d'une réduction de **1 euro**.

Les réductions sont **cumulables**.

On choisit un usager au hasard. On note Y la variable aléatoire égale au **montant total de la réduction** (en euros).

1. Donner les valeurs possibles de la variable aléatoire Y.

2. Associer à chaque valeur de Y un événement à l'aide des événements A et M.

3. Établir la loi de probabilité de Y sous la forme d'un tableau.

4. Calculer l'espérance de Y et interpréter le résultat.

Partie C

On interroge désormais n usagers choisis au hasard, de manière indépendante.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'usagers ayant un abonnement annuel. On rappelle que :

$$\mathrm{p}(A) = 0{,}2.$$

1. Étude pour une valeur donnée de n

On fixe $n = 15$.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.

b) Calculer la probabilité d'avoir exactement 3 usagers ayant un abonnement annuel.

c) Calculer la probabilité d'avoir au moins 5 usagers ayant un abonnement annuel.

2. Recherche d'un effectif suffisant

On veut déterminer le **nombre minimum** n d'usagers à interroger afin que la probabilité qu'**au moins un** usager ait un abonnement annuel soit **supérieure ou égale à** 0,99.

a) Exprimer $\mathrm{p}(X \geq 1)$ en fonction de n.

b) En déduire par le calcul le plus petit entier n vérifiant la condition demandée.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=1+x^2-2x^2\ln(x).$$

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

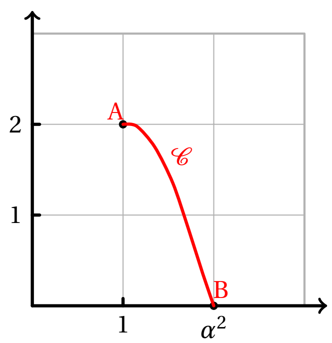
Partie A

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-4x\ln(x)$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur $]0,+\infty[$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Déduire de ce qui précède le signe de f sur $]0,+\infty[$.

Partie B

1. Montrer que pour tout $x\in[1;\alpha]$, $f''(x)=-4(\ln(x)+1)$.
   Justifier que f est concave sur l'intervalle $[1;\alpha]$.
2. Sur la figure ci-dessous, A et B sont les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et α.
   a) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).
   b) En déduire que pour tout réel $x\in[1;\alpha]$,

$$f(x)\geq-\frac{2}{\alpha-1}x+\frac{2\alpha}{\alpha-1}.$$



Exercice 3 (5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.

Au début de l'étude, la population est de 100 000 insectes.

Pour préserver l'équilibre du milieu naturel, le nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de 60% chaque mois.

En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

On a donc :

$$u_0 = 0{,}1.$$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n.$$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel :

$$u_n > 0{,}4.$$

4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.

Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0{,}1 \qquad \text{et pour tout entier naturel } n, \qquad v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2,$$

où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ par :

$$f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2.$$

a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

3. **a)** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

b) Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite.

c) Déterminer la valeur de ℓ. Justifier la réponse.

d) Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

```
def seuil(a) :
  v = 0.1
  n = 0
  while v < a :
    v = 1.6 * v - 1.6 * v * v
    n = n + 1
  return n
```

4. **a)** Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.4)` ?

b) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie `seuil(0.35)`.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. **Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.**

1. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.

   On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

   Affirmation 1 : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

2. **Affirmation 2 :**

$$\forall x \in \,]1\,;+\infty[, \quad e^x \leq f(x) \leq e^{2x+1} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2-1} = 0.$$

3. On considère la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$h(x) = x(\ln x)^2.$$

   Affirmation 3 : La courbe représentative de la fonction h dans un repère du plan admet un point d'inflexion d'abscisse $x = e^{-1}$.

4. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \neq 0$$

   et qui converge vers un réel ℓ.

   Affirmation 4 : La suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

   converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

5. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et pour } x > 0, \qquad f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}.$$

   Affirmation 5 : La fonction f est continue en 0.